Analisi, Primo Esonero (15-11-2019), Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi. **D**

Nome: *Cognome:* *Matricola:*

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +2, risposta non data = 0, risposta sbagliata = −1. Esercizi 4–5: punti 0–6. (Totale= 36. Voto ≤ 17 = Non sufficiente $\mapsto$ Scritto primo appello.)

Esercizio 1 Per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

1. $\frac{1}{n^2}(\cos(a_n)e^{-|a_n|}) \to 0$ per $n \to +\infty$. V F
2. $\{\frac{1}{1+2a_n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata. V F
3. $n^2 e^{-a_n} \to 0$ per $n \to +\infty$. V F
4. $\{-a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ per $n \to +\infty$. V F

Esercizio 2 Per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona crescente si ha:

1. Se f è continua, allora $\lim_{x\to 0} f\left(\dfrac{\log(1+x^2)}{\cos 3x - 1}\right) < f(0)$. V F
2. $\lim_{x\to -\infty} \cos(f(x))$ non esiste . V F
3. Esiste finito $\lim_{x\to 7^-} (e^{-f(x)} - f(e^x))$. V F
4. Se f è continua e $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n,\, y_n \in \mathbb{R} :\ f(x_n) \leq e^{-n},\ f(y_n) \geq e^n$, allora f è iniettiva e $Im(f) = \mathbb{R}$. V F

Esercizio 3 Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione.

1. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k^6}$ converge. V F
2. Se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ converge. V F
3. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(a_k)}{k}$ converge. V F
4. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, allora $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{3k} a_k$ converge. V F

Esercizio 4 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da $a_n := 3n^2 - 4n + (-1)^n \cos(\frac{n\pi}{8})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

A) Stabilire, motivando la risposta, se a_n è definitivamente monotona.

B) Determinare se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

C) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{5\alpha} + \cos^2(n)}$ è convergente.

Esercizio 5 Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x < -1; \\ -x + c & \text{se } x \geq -1. \end{cases}$$

A) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione f definita sopra è continua.

B) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione f definita sopra è monotona.

C) Per $c = -2$ determinare $\sup\limits_{[-2,2]} f(x)$ e $\inf\limits_{[-2,2]} f(x)$ e stabilire se essi sono rispettivamente massimi e minimi.